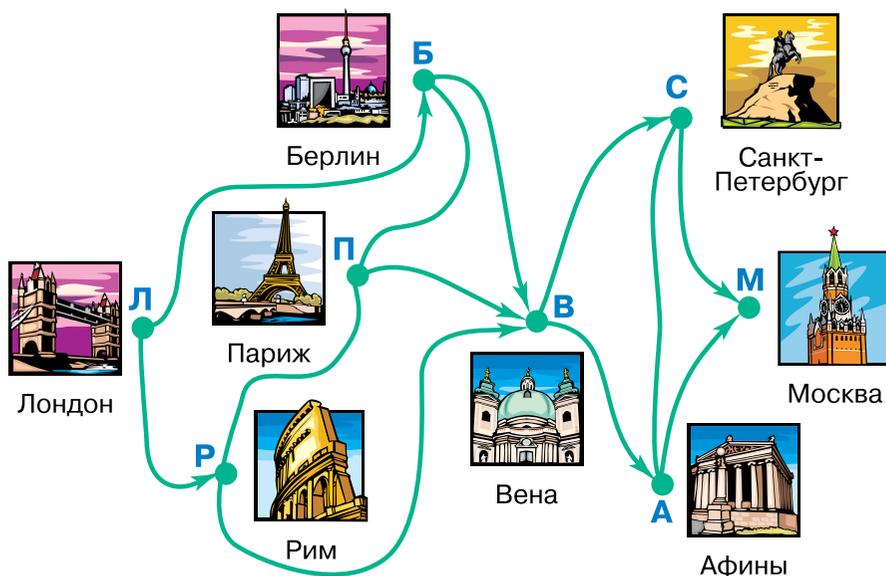


Определи по графу, сколькими способами можно проехать из города Л в город М. По дорогам со стрелками можно двигаться только в направлении стрелок, по каждой дороге можно проезжать не больше одного раза.



## Выигрышная стратегия

Мы строили различные партии игр, но при этом совсем не принимали во внимание стремление игроков к победе. Теперь нас будут интересовать лишь такие партии, в которых *оба игрока стремятся к победе*. Будем называть такие партии *разумными*. Игроков, которые стараются победить, а не делают ходы наугад, мы тоже будем называть *разумными*.

Итак, играют двое и каждый из них стремится к победе. Если правила игры не допускают ничьей, то в каждой партии кто-то из игроков обязательно выигрывает. Оказывается, что в каждой игре с полной информацией, правила которой не допускают ничьей, существует *выигрышная стратегия* для одного из игроков.



**Выигрышная стратегия** — это правило, следуя которому один из игроков может выиграть, как бы ни играл его противник.

Используя это правило, можно победить любого соперника — и разумного, и не очень. Ясно, что для каждой игры с определёнными правилами выигрышную стратегию может иметь только один из игроков.

Мы упоминали о том, что шахматы и шашки тоже игры с полной информацией. Значит, и в этих играх есть выигрышная стратегия для одного из игроков. Почему же тогда никто не воспользуется такой стратегией? Поиск выигрышной стратегии в игре с полной информацией часто можно выполнить только при помощи перебора всех возможных партий игры. Для этого строится дерево игры и изучаются вершины построенного дерева. Дерево игры в шахматы огромно: на первом уровне такого дерева 20 вершин, на втором — уже 400 вершин! Построить такое дерево пока не удалось никому, даже при помощи самого мощного компьютера, поэтому и выигрышную стратегию найти тоже пока не удалось. Неизвестно даже, кто из игроков в шахматной игре имеет такую стратегию.

В играх, которые допускают ничью, может существовать *ничейная стратегия* — правило, позволяющее каждому из игроков свести любую партию к ничьей. Ничейная стратегия есть, например, в игре *Крестики-нолики*.

## Выигрышные и проигрышные позиции

Для того чтобы найти выигрышную стратегию, нужно последовательно рассмотреть все возможные позиции игры. Все позиции игры можно перебрать, построив дерево игры. Трудность здесь в том, что для многих игр такое дерево оказывается слишком большим. Но для некоторых игр удаётся построить выигрышную стратегию без перебора всех возможных позиций. Такие игры мы обсудим позже.

Одна из немногих игр, в которых можно перебрать все позиции, не строя дерева игры, — это игра *Камешки*: ведь все возможные позиции этой игры укладываются в начало числового ряда от нуля до начальной позиции.

Рассмотрим игру *Камешки* с начальной позицией **8** камешков, в которой разрешается брать на каждом ходу **1, 3** или **4** камешка. Изучать позиции игры будем с точки зрения разумного игрока, чья очередь делать ход (кто именно из игроков — Первый или Второй — неважно). Разместим все возможные позиции игры на числовой линейке.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---



Назовём **позицию выигрышной**, если из неё есть ход, который оставит противнику проигрышную позицию.



Назовём **позицию проигрышной**, если любой ход из неё оставляет противнику выигрышную позицию.

Позиция **0** *проигрышная*: партия закончена, игрок, чья очередь была бы делать ход, *уже проиграл*.

Позиции **1, 3** и **4** *выигрышные*: игрок может забрать все камешки и тем самым оставить противнику проигрышную позицию **0**.

Позиция **2** *проигрышная*: из этой позиции можно сделать только один ход — взять **1** камешек и тем самым оставить противнику выигрышную позицию **1**.

На числовой линейке выигрышные позиции пометим красным, а проигрышные — синим.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Позиция **5** *выигрышная*: взяв **3** камешка, игрок оставляет противнику проигрышную позицию **2**. Так же и позиция **6** *выигрышная*: взяв **4** камешка, игрок оставляет противнику проигрышную позицию **2**.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Позиция **7** *проигрышная*: все ходы, которые можно сделать из этой позиции, оставляют противнику выигрышную позицию **6, 4** или **3**.

Начальная позиция **8** *выигрышная*: взяв **1** камешек, игрок оставляет противнику проигрышную позицию **7**.

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Изучая позиции игры от заключительной к начальной, мы последовательно пометили все возможные позиции игры как выигрышные или проигрышные. При этом начальная позиция оказалась выигрышной. Это означает, что в данной игре выигрышную стратегию имеет Первый (тот, кто должен делать ход в начальной позиции).

Пользуясь раскрашенной числовой линейкой, сформулируем выигрышную стратегию для Первого:

1. На первом ходу взять один камешек (при этом Второму достаётся **7** камешков).
2. На третьем ходу взять столько камешков, чтобы оставить на столе только **2** камешка или **0** камешков (сколько именно камешков при этом надо взять, зависит от того, сколько камешков возьмёт Второй на втором ходу).
3. На пятом ходу (если игра не закончилась раньше) забрать оставшийся камешек и выиграть.

 Выигрышная стратегия заключается в том, чтобы после каждого хода оставлять противнику проигрышную позицию.

Поэтому выигрышную стратегию в игре имеет тот игрок, который первым сможет занять выигрышную позицию. Поэтому:

 Если начальная позиция выигрышная, то выигрышную стратегию имеет Первый, если проигрышная — Второй.

**116**

Найди выигрышную стратегию в игре *Камешки* (начальная позиция **15**, разрешается брать **1**, **3** или **4** камешка). Для этого исследуй все позиции игры, раскрась числовую линейку (можно вырезать заготовку числовой линейки со вкладыша тетради

проектов). Выясни, у кого из игроков есть выигрышная стратегия. Построй последовательность такой партии, в которой этот игрок следует выигрышной стратегии, а его противник на каждом ходу берёт один камешек.

**117**

Найди выигрышную стратегию в игре *Камешки* (начальная позиция **14**, разрешается брать **1**, **3** или **4** камешка). Можешь воспользоваться числовой линейкой, уже раскрашенной в ходе решения задачи **116**. Выясни, у кого из игроков есть выигрышная стратегия в этой игре, сформулируй выигрышную стратегию.

**118**

Найди выигрышную стратегию в игре *Камешки* (начальная позиция **214**, разрешается брать **1** или **2** камешка).



Для решения необязательно раскрашивать числовую линейку от 0 до 214 целиком. Вместо этого можно:

- 1) раскрасить позиции от 0 до 15;
- 2) найти закономерность расположения проигрышных позиций на числовой прямой;
- 3) определить, какой будет начальная позиция, а значит, выяснить, у кого из игроков есть выигрышная стратегия;
- 4) сформулировать выигрышную стратегию, не перечисляя проигрышные позиции, а описывая их.

**119**

*Робот* находится в центре коридора без боковых выходов, идущего в неизвестном направлении: вертикальном (идущего вверх-вниз) или горизонтальном (идущего вправо-влево). Составь алгоритм, выводящий *Робота* из коридора, если известно, что сейчас он находится на расстоянии не больше 15 шагов до каждого из двух выходов коридора.

**120**

Реши задачу.

Пятеро друзей встретились и обменялись рукопожатиями каждый с каждым. Сколько всего было рукопожатий?



**121**

Даны правила игры *Сотня*.

### **Правила игры *Сотня***

Начальная позиция. Число **0**.

Возможные ходы. На каждом ходу игрок прибавляет к имеющемуся числу любое целое число от 1 до 9 включительно.

Как определить победителя. Игра заканчивается, если позиция оказывается равной **100**. При этом выиграл тот, кто прибавил последнее число.

Устройте соревнование с соседом по парте — сыграйте 4 партии в *Сотню*.

Начинайте игру по очереди: пусть один из вас играет Первым в партиях с чётными номерами, а другой — с нечётными. Заполни таблицу соревнования (образец такой таблицы дан в задаче 94, вырежи такую таблицу из вкладыша тетради проектов). За каждую победу игрок получает 1 очко, а за поражение — 0 очков. Сколько раз в вашем соревновании выиграл Второй?

**122**

Найди выигрышную стратегию в игре *Сотня*.

Для этого:

- 1) начни раскрашивать числовую линейку, начиная с заключительной позиции — от 100 до 78 (можно вырезать заготовку числовой линейки со вкладыша тетради проектов);
- 2) найди закономерность расположения проигрышных позиций на числовой прямой;
- 3) определи, какой будет начальная позиция — выигрышной или проигрышной, а значит, выясни, у кого из игроков есть выигрышная стратегия;
- 4) сформулируй выигрышную стратегию.

**123**

Построй последовательность бусин Г длины не меньше пяти, такую, чтобы все следующие утверждения не имели смысла для этой последовательности:

В последовательности Г седьмая бусина — красная треугольная.

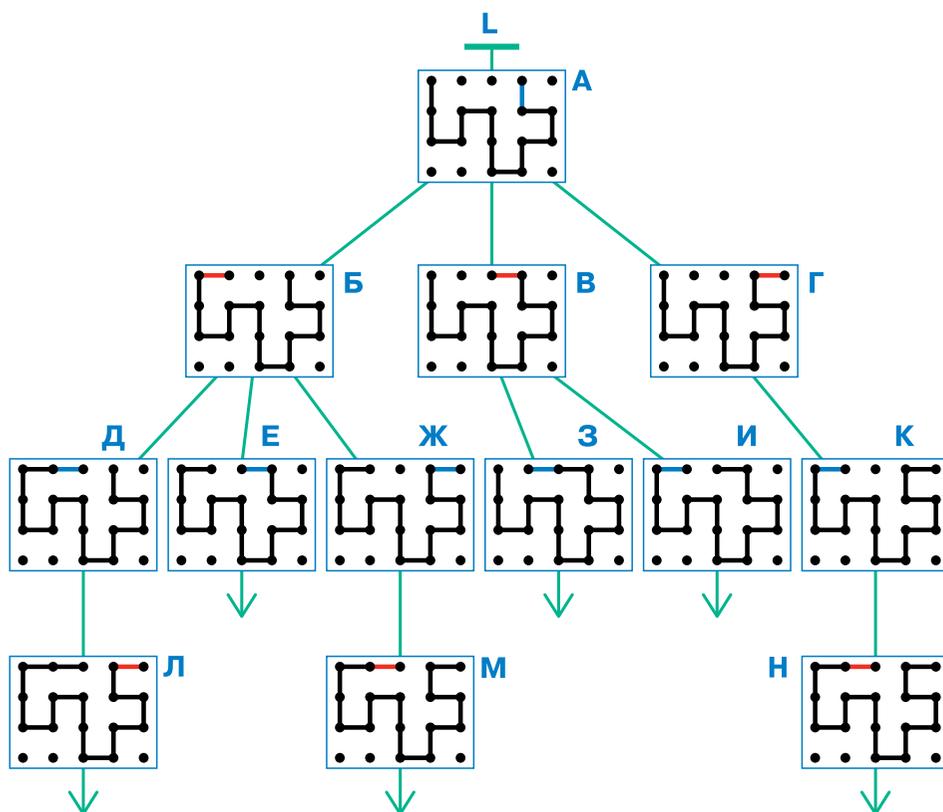
В последовательности Г следующая бусина после каждой круглой — квадратная.

В последовательности Г предыдущая бусина перед каждой квадратной — треугольная.

Дерево игры *Ползунок* (см. задачу 112) на поле  $5 \times 4$  очень большое, оно не помещается на странице. Дерево L — это часть полного дерева игры, состоящая из некоторого элемента (т. е. позиции) A и всех элементов, в которые из A идут последовательности. Таким образом, L есть дерево перебора всех возможных окончаний игры из позиции A.

Определи, какой игрок — Первый или Второй — должен ходить в позиции A. Затем определи, у кого из игроков есть выигрышная стратегия. Для этого:

- 1) перерисуй дерево L в тетрадь, заменив позиции их именами;
- 2) исследуй все позиции дерева L в учебнике и в тетради, имя каждой выигрышной позиции обведи красным, а проигрышной — синим;
- 3) определи, у кого из игроков есть выигрышная стратегия, и запиши эту стратегию в виде последовательности позиций.



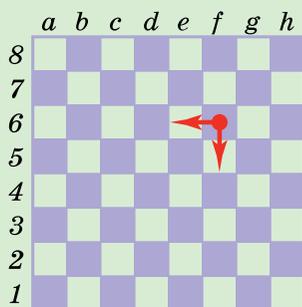


**Правила игры Пешка**

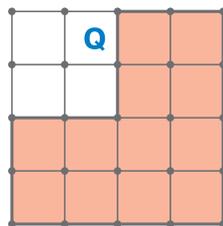
**Начальная позиция.** Игра ведётся на шахматной доске, пешка стоит на одном из полей (на каком именно поле — устанавливается дополнительными правилами).

**Возможные ходы.** На каждом ходу игрок передвигает пешку на одно поле влево или на одно поле вниз.

**Как определить победителя.** Игра заканчивается, если пешка оказывается в левом нижнем углу доски — на поле *a1*. Выигрывает тот игрок, который сделал последний ход.

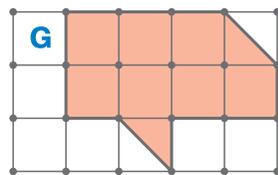


Исследуй игру Пешка. Попытайся объяснить, почему в этой игре выигрышная стратегия не нужна: победа не зависит от того, насколько умело играют игроки. При каких начальных позициях в игре Пешка выигрывает Первый и при каких — Второй?



а) Нарисуй, как разрезать многоугольник Q, чтобы получилось четыре одинаковых многоугольника.

б) Нарисуй, как разрезать многоугольник G, чтобы получилось два одинаковых многоугольника.



За один ход фишка может сдвинуться на одно поле влево или на одно поле вверх. Сколькими различными путями фишка может пройти по шахматной доске из поля *c5* на поле *a8*, если будет двигаться только влево или вверх?

