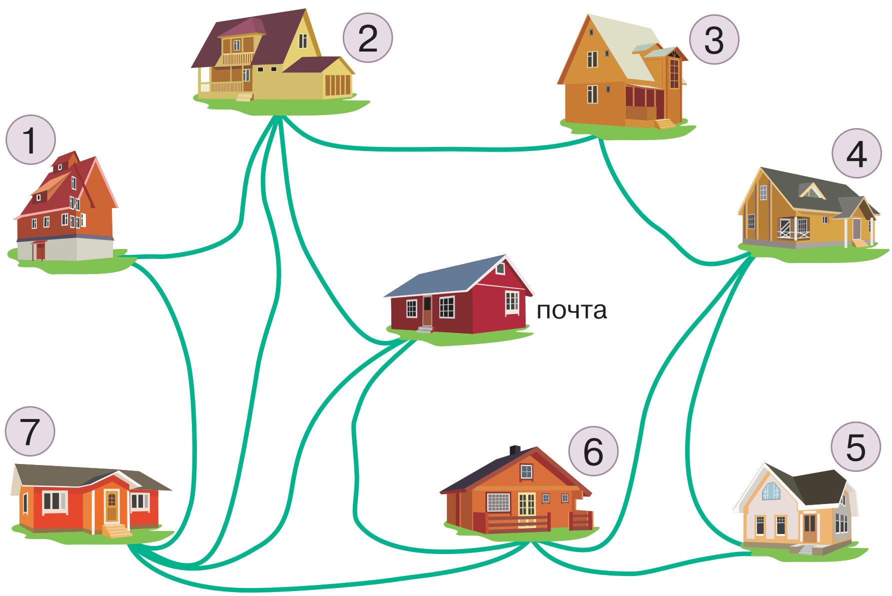
153 Реши задачу.

Почтальон Печкин, выйдя из почтового отделения, разнёс почту в каждый дом деревни, после чего зашёл с посылкой к дяде Фёдору (зайдя сначала за ней на почту), а потом вернулся домой. На рисунке показаны все тропинки, по которым проходил Печкин, причём, как оказалось, ни по одной из них он не проходил дважды. Каков мог быть маршрут почтальона Печкина? В каком доме живёт дядя Фёдор?



Равновесные выигрышные стратегии

До сих пор, для того чтобы построить выигрышную стратегию, мы исследовали все позиции игры и выделяли выигрышные и проигрышные позиции. Но для многих игр существуют стратегии, построение которых не требует исследования всех позиций. Таковы, например, *равновесные* стратегии, которыми мы сейчас займёмся.

Рассмотрим игру *Монеты на весах*.

Правила игры *Монеты на весах*

Начальная позиция. На каждой чашке весов лежат монеты (сколько именно монет лежит на каждой чашке, устанавливается дополнительными правилами). Все монеты одинаковые.

Возможные ходы. На каждом ходу игрок может взять сколько угодно монет с одной чашки.

Как определить победителя. Игра заканчивается, если все монеты закончились. Выигрывает игрок, который забрал последнюю монету.

Пусть в начальной позиции на каждой чашке лежит по 20 монет. При такой начальной позиции весы находятся в *равновесии* — ведь монет на чашках поровну и все монеты одинаковые. Первый любым своим ходом это равновесие *нарушит* — он возьмёт монеты только с одной чашки. А Второй может *восстановить* равновесие — взять столько же монет с другой чашки. Пусть и дальше Второй каждым своим ходом восстанавливает равновесие. Выигрышна ли такая стратегия для Второго?

Восстанавливая равновесие на каждом ходу, Второй добивается того, что все равновесные позиции достаются Первому. Но и заключительная позиция равновесная (на обеих чашках ничего нет), так что и эта позиция в какой-то момент игры достанется Первому. При этом Первый уже не сможет сделать очередной ход и проиграет. Таким образом, описанная стратегия является выигрышной для Второго.

Итак, для предложенной равновесной стратегии мы проверили два условия:

1. Второй всегда сможет сделать свой ход.
2. Заключительная позиция обязательно достанется Первому (и поэтому он обязательно проиграет).

Оба эти условия выполнены, значит, наша стратегия выигрышная.

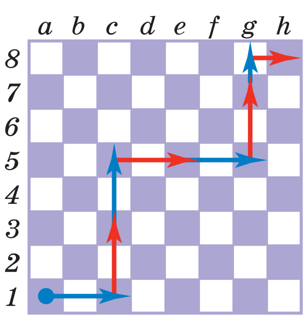
! Стратегию, при которой игрок на каждом своём ходу восстанавливает равновесие (т. е. делает позицию равновесной), мы будем называть **равновесной стратегией.**

В игре *Монеты на весах*, где начальная позиция неравновесная (например, на одной чашке лежит 15 монет, а на другой — 29), равновесную стратегию имеет Первый: на первом ходу он должен сделать позицию равновесной (взять 14 монет из 29), а дальше повторять ходы Второго, восстанавливая равновесие. Эта стратегия выигрышна для Первого: он всегда сможет сделать ход, а заключительная позиция обязательно достанется Второму.

Равновесную стратегию можно строить не только в играх со взвешиванием, но и во многих других играх. Обычно это игры, в которых проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход. Для построения равновесной стратегии в такой игре нужно сначала сообразить, какие позиции считать равновесными. При этом важно, чтобы и заключительная позиция тоже оказалась равновесной.

Равновесную стратегию можно построить, например, для игры *Ладья*.

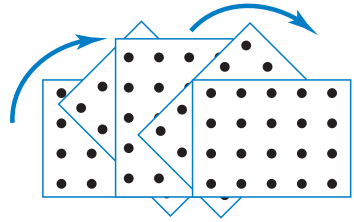
Действительно, можно считать равновесными такие позиции этой игры, в которых ладья стоит на чёрной диагонали шахматной доски. Тогда в игре с начальной позицией *a1* равновесная стратегия Второго состоит в том, чтобы каждый раз после хода Первого возвращать ладью на эту диагональ (и тем самым делать позицию снова равновесной). Такая стратегия оказывается выигрышной для Второго. Следуя этой стратегии, Второй каждый раз передвигает ладью на столько же полей, на сколько её передвинул Первый на предыдущем ходу; но если Первый сделал ход по вертикали, то Второй ходит по горизонтали, и наоборот. Второй всегда сможет сделать такой ход, и заключительная позиция непременно достанется его противнику.

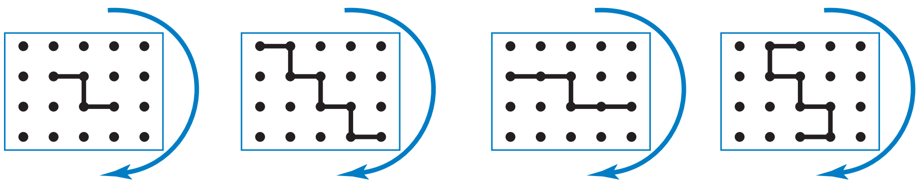


На рисунке показан пример партии, в которой Второй следует этой стратегии (на рисунке показана схема пути ладьи в этой партии).

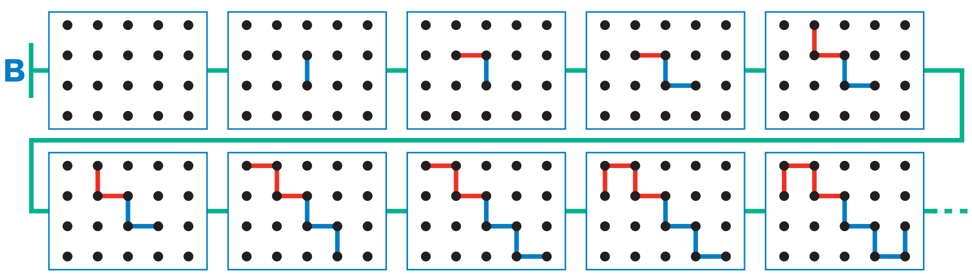
Заметим, что эта равновесная стратегия ничем не отличается от той стратегии, которую мы построили, изучив все позиции игры: мы просто получили один и тот же результат разными способами.

Приведём ещё один пример игры, для которой можно построить равновесную стратегию. Это знакомая тебе игра *Ползунок* на поле 5×4. Какие позиции в этой игре мы будем считать равновесными? Начальную позицию этой игры можно повернуть «вверх ногами» — от этого рисунок поля не изменится (см. рисунок). Будем считать равновесными и другие позиции, которые не изменяются при таком повороте. Вот примеры таких позиций:





Пусть теперь Первый следует такой равновесной стратегии: на первом ходу он проводит вертикальный отрезок в центре поля (при этом позиция остаётся равновесной). А потом после каждого хода Второго Первый восстанавливает равновесие: если Второй сделал ход на одном конце ползунка (ломаной), то Первый проводит отрезок на другом конце и в обратном направлении. Вот пример начала партии, в которой Первый следует такой стратегии:



При такой стратегии если Второму удалось сделать ход, то и Первому это удастся — он всегда сможет провести отрезок на другой стороне поля и восстановить равновесие. Если же Второй сделать ход не может, то он уже проиграл. Следовательно, описанная равновесная стратегия выигрышна для Первого.

В задачах ты встретишься и с другими играми, в которых можно построить выигрышную равновесную стратегию. Некоторые игры будут похожи на те, которые мы разобрали, а другие будут непохожи. В каждой такой игре нужно будет выделить равновесные позиции и описать равновесную стратегию для одного из игроков. После этого останется только убедиться, что построенная равновесная стратегия является выигрышной — как бы ни играл противник, игрок, следующий этой стратегии, непременно выиграет.

154 Даны правила игры *Шары и ящики.*

Правила игры *Шары и ящики*

Начальная позиция. Два открытых ящика, в каждом лежат шары. Сколько шаров в каждом ящике, определяется дополнительными правилами.

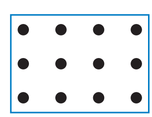
Возможные ходы. На каждом ходу игрок забирает из одного ящика сколько угодно шаров.

Как определить победителя. Игра заканчивается, если очередной ход сделать невозможно — шары закончились. Выигрывает тот, кто сделал последний ход.

Исследуй игру *Шары и ящики* для различных начальных позиций. Кто из игроков обладает выигрышной стратегией? Опиши эту стратегию.

Нужно рассмотреть два варианта начальных позиций:
1) если шаров в ящиках поровну;
2) если шаров в ящиках не поровну.

155 В игре *Ползунок* на поле 4×3 существует равновесная выигрышная стратегия для Первого, подобная той, которая описана на с. 99. Построй последовательность позиций какой-либо партии этой игры, в которой Первый следует равновесной выигрышной стратегии.



156 Сформулируй равновесную выигрышную стратегию для Первого в игре *Ладья* с начальной позицией *а3.* Приведи пример партии этой игры, в которой Первый следует твоей стратегии, — нарисуй путь ладьи в такой партии.

157 Классифицируй числа множества Р по остаткам от деления на 4: в одну группу помести все числа множества Р, которые делятся на 4 без остатка, в другую — те числа, при делении которых на 4 получается остаток 1, и т. д.

Р

55 144 9 3 71 35
46 93 85 10 80 24

158 Даны правила игры *Минусы.*

Правила игры *Минусы*

Начальная позиция. В строке написано несколько минусов. Сколько именно, определяется дополнительными правилами.

Возможные ходы. На каждом ходу игрок переправляет один минус на плюс или два соседних минуса на два плюса.

Как определить победителя. Игра заканчивается, если очередной ход сделать невозможно — минусы закончились. Выигрывает тот, кто сделал последний ход.

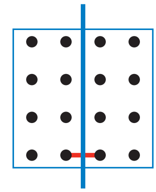
Найди выигрышную стратегию в игре *Минусы* с начальной позицией 18 минусов и в той же игре с начальной позицией 21 минус. Определи, кто обладает выигрышной стратегией, и опиши эту стратегию для каждой из данных начальных позиций. Теперь попробуй обобщить свои выводы — опиши выигрышную стратегию для любой игры *Минусы*:

а) если начальная позиция — нечётное число минусов;

б) если начальная позиция — чётное число минусов.

159 В игре *Ползунок* на поле 4×4 равновесную выигрышную стратегию для Первого, которая описана на с. 99, построить не удастся. Но в этой игре существует другая равновесная выигрышная стратегия для Первого.

Она получается, если считать равновесными такие позиции, в которых при перегибании поля по синей линии его правая и левая части совпадают. Эта стратегия заключается в зеркальном повторении ходов Второго (представь себе, что зеркало стоит на синей прямой).



Построй последовательность позиций какой-либо партии, в которой Первый следует такой стратегии и первым ходом соединяет две средние точки нижнего ряда.

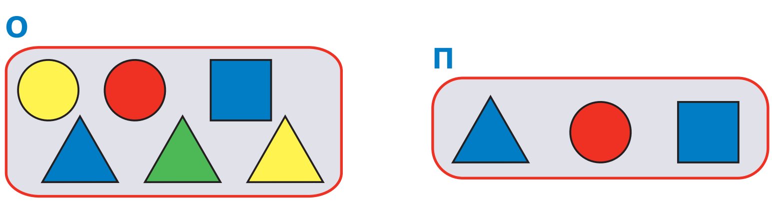
160 Построй два таких множества бусин А и В, для которых все следующие утверждения истинны:

Множество П равно пересечению множеств А и В.

Множество О равно объединению множеств А и В.

В множестве А жёлтых бусин больше, чем квадратных.

В множестве В треугольных бусин больше, чем красных.



161 *Робот* находится на прямоугольном поле, внутри которого стен нет. Составь алгоритм, при выполнении которого *Робот* закрашивает все клетки поля, прилегающие к стенам.

162 Сколько разных чисел можно получить, переставляя цифры числа **5434**? Построй дерево перебора вариантов.

163 Исследуй игру *Оттесни шашку.* У кого из игроков есть равновесная выигрышная стратегия? Сформулируй эту стратегию.

Правила игры *Оттесни шашку*

Начальная позиция. Полоска 1×20 клеток. В крайних клетках полоски стоят белая и чёрная шашки.

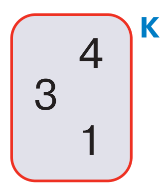
Возможные ходы. Каждый игрок на своём ходу передвигает свою шашку на одну или две клетки по направлению к середине полосы, если это возможно. Перепрыгивать через шашку противника нельзя. Первый двигает белую шашку, Второй — чёрную.

Как определить победителя. Игра заканчивается, если очередной ход сделать невозможно. Выигрывает тот, кто сделал последний ход.

164 Найди выигрышную стратегию в игре *Камешки* (начальная позиция **308**, разрешается брать **1**, **2** или **3** камешка).

Для решения необязательно раскрашивать числовую линейку от 0 до 308 целиком, а можно:
1) раскрасить позиции от 0 до 16;
2) найти закономерность расположения проигрышных позиций на числовой прямой;
3) определить, какой будет начальная позиция, а значит, выяснить, кто из игроков обладает выигрышной стратегией;
4) сформулировать выигрышную стратегию, не перечисляя проигрышные позиции, а описывая их.

165 Построй последовательность однозначных чисел длины 5, для которой все следующие утверждения истинны:



В этой последовательности следующее число после каждого нечётного — чётное.

Первый член этой последовательности больше третьего на 2.

Каждый член этой последовательности есть в множестве K.

166 Даны правила игры *Две кучи камешков 2.*

Правила игры *Две кучи камешков 2*

Начальная позиция. Две кучи камешков (сколько камешков в каждой куче, устанавливается дополнительными правилами).

Возможные ходы. На каждом ходу игрок может взять либо сколько угодно камешков из одной кучи, либо поровну камешков из обеих куч одновременно.

Как определить победителя. Игра заканчивается, если все камешки закончились. Выигрывает игрок, который забрал последний камешек.

Напиши последовательность позиций партии игры *Две кучи камешков 2*:

а) с начальной позицией (9; 6), в которой выиграл Первый;

б) с начальной позицией (7; 4), в которой выиграл Второй.

167 Найди выигрышную стратегию в игре *Две кучи камешков 2* с начальной позицией (6; 10) и в той же игре с начальной позицией (9; 8):

1) раскрась таблицу 11×11, начиная с заключительной позиции — клетки (0; 0);

2) определи, какой будет каждая из данных начальных позиций — выигрышной или проигрышной, а значит, у кого из игроков есть в этой позиции выигрышная стратегия;

3) сформулируй выигрышную стратегию для каждой из данных начальных позиций.

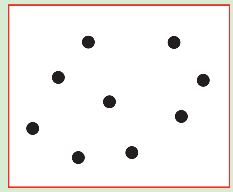
Теперь для каждой из данных начальных позиций запиши последовательность позиций какой-нибудь партии, в которой один из игроков использует выигрышную стратегию, а другой на каждом ходу берёт по одному камешку из каждой кучи.

168 *Робот* находится в тупике (в закрытом конце) прямого коридора шириной в 1 клетку, идущего в неизвестном направлении. В конце коридора есть выход. Составь алгоритм, выводящий *Робота* из этого коридора.

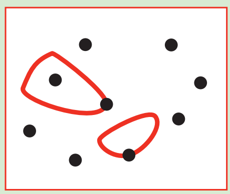
169 Английский математик Джон Хортон Конвей (р. 1937) придумал много интересных математических игр. Вот правила одной из таких игр:

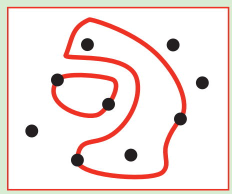
Правила игры *Ободок*

Начальная позиция. Несколько точек на плоскости.



Возможные ходы. На каждом ходу игрок может провести одну замкнутую кривую (ободок) либо через одну из точек, либо через две. При этом два ободка пересекаться не должны. Вот примеры разрешённых ходов:





Как определить победителя. Игра заканчивается, если очередной ход сделать невозможно — все точки лежат на ободках. Выигрывает тот, кто сделал последний ход.

Известно, что в игре *Ободок* с любой начальной позицией у Первого есть равновесная выигрышная стратегия. Найди равновесную выигрышную стратегию для этой игры с начальной позицией 7 точек и для той же игры с начальной позицией 8 точек. Как в каждой из этих двух начальных позиций Первый должен провести ободок, чтобы сделать позицию равновесной? (Своим первым ходом Первый должен разделить все точки на две части так, чтобы каждый ход, сделанный в одной части, можно было повторить в другой.) Сформулируй выигрышную стратегию для каждой из данных начальных позиций.
Попробуй обобщить своё решение — построй выигрышную стратегию для игры *Ободок*: а) если в начальной позиции нечётное число точек; б) если в начальной позиции чётное число точек.

170 Двое играют в следующую игру: каждый игрок по очереди вычёркивает одно число из ряда **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **10**, **11**, **12**, **13**, **14**, **15**, **16**, **17**, **18**, **19** до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает первый игрок, если не делится — второй. У кого из игроков в этой игре есть выигрышная стратегия? Опиши эту стратегию.

Составные условия: слова «и», «или», «не»

При составлении алгоритмов иногда бывает нужно использовать не одно условие, а сразу два.

Пусть, например, *Робот* стоит на поле, в котором нет внутренних стен. Чтобы понять, находится ли *Робот* в верхнем левом углу поля, нужно выяснить истинность двух условий: `слева стена`, `сверху стена`. Если оба условия *одновременно истинны*, то *Робот* стоит в левом верхнем углу поля (на котором нет внутренних стен). Если *хотя бы одно из этих условий ложно*, то *Робот* стоит в другой клетке поля.

Другой пример. Нам надо выяснить, не находится ли *Робот* рядом с любой из двух вертикальных границ поля. Для этого мы должны проверить истинность двух условий: `слева стена`, `справа стена`. Если *хотя бы одно из этих условий истинно*, то *Робот* находится рядом с одной из вертикальных границ поля. Если *оба условия одновременно ложны*, то *Робот* не находится у вертикальной стены.

Посмотри: чтобы объяснить, какие значения истинности должны иметь два условия, нам пришлось написать целый абзац. Чтобы иметь возможность это записать кратко, в информатике и в математике принято использовать слова «и», «или», «не». При этом условие, которое получается из простых условий с помощью слов «и», «или», «не», называется **составным условием**.

Слово «и». В русском языке сложное предложение, образованное с помощью союза «и» (или с помощью близкого по значению союза «а»), *истинно в том и только в том случае, когда истинны оба* составляющие его простые предложения